Übung zur Kurvendiskussion mit Parameter

Aufgabe 1

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k : x \mapsto \frac{1}{4}(x^3 - 6kx^2 + 9k^2x)$ mit $k \in \mathbb{R}_0^+$.

1.1 Ermitteln Sie alle Nullstellen der Funktion f_k mit ihren Vielfachheiten. [5]

1.2 Bestimmen Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen von f_k. [7]

1.3 Berechnen Sie den Wert von k so, dass die Tangente an den zugehörigen Graphen an der Stelle $x_0 = 2k$ die Steigung $m = -3$ besitzt. [3]

2.0 Für die folgenden Aufgaben wird $k = 2$ gesetzt

2.1 Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente des Graphen G_{f2} an der Stelle $x_0 = 4$. [4]

3 Zeichnen Sie mit den bisherigen Ergebnissen den Graphen G_{f2} sowie den Graph der Tangente für $0 \le x \le 8$ in ein gemeinsames KKS. (1LE = 1cm) [5]

Aufgabe 2

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{1}{4}(a - x)(x^2 + 4x + 4)$ mit $a \in \mathbb{R}$.

1.1 Ermitteln Sie das Intervall, in dem $f_a(x) \ge 0$ ist. [4]

1.2 Bestimmen Sie Anzahl der Extremstellen von f_a in Abhängigkeit von a. [7]
(Mögliches Teilergebnis: $f_a'(x) = -\frac{1}{4}(3x^2 + (8-2a)x - 4a + 4)$.)

1.3 Berechnen Sie den Wert von a so, dass der Graph von f_a im Schnittpunkt mit der y-Achse die Steigung $m = 1{,}5$ besitzt. [2]

2.0 Für die folgenden Aufgaben wird $a = 4$ gesetzt

2.1 Geben Sie die Nullstellen der Funktion f_4 mit den jeweiligen Vielfachheiten an. [2]

2.2 Ermitteln Sie Art und Koordinaten sämtlicher Extrempunkte des Graphen von f_4. [5]

2.3 Zeichnen Sie mit den bisherigen Ergebnissen den Graphen G_{f4} für $-4 \le x \le 4$ in ein gemeinsames KKS. (1LE = 1cm) [4]

Aufgabe 3

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k : x \mapsto \frac{1}{32}(x^3 - 6kx^2 - 36k^2x + 216k^3)$ mit $k \in \mathbb{R}_0^-$.
Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_f bezeichnet.

1 Untersuchen Sie die Funktion f_k auf Symmetrie.

2.1 Zeigen Sie, dass $x_1 = -6k$ eine Nullstelle der Funktion f_k ist.
Berechnen Sie alle Nullstellen und ihre Vielfachheiten.
Geben Sie f_k als Produkt von Linearfaktoren an.

2.1 Light-Version: Zeigen Sie, dass gilt: $f_k(x) = \frac{1}{32}(x + 6k)(x^2 - 12kx + 36k^2)$ und bestimmen Sie Lage und Vielfachheit aller Nullstellen von f_k.

2.2 Bestimmen Sie Art und Lage der Punkte mit waagrechter Tangente in Abhängigkeit von k.

2.3 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t an der Stelle $x_0 = 4k$. (Zwerg: $y = -\frac{9}{8}k^2x + \frac{23}{4}k^3$)
Berechnen Sie die Koordinaten weiterer Schnittpunkte der Tangente t mit f_k.

2.4 Bestimmen Sie k so, dass die Tangente an einer Nullstelle des Graphen parallel zur Geraden mit $9x = 2y$ verläuft. (Zwerg : $k = -1$)

3 Zeichnen Sie mit den bisherigen Ergebnissen und geeigneter Zwischenwerte den Graphen G_f sowie die Graphen der Tangenten für $-8 \le x \le 7$ und $\mathbf{k = -1}$ in ein gemeinsames KKS.